

# Aus Kapitel 20

## Aufgaben

**20.1 ••** Betrachten Sie einen Carnot-Prozess mit einem Van-der-Waals-Gas als Arbeitsmedium.

Der Zustand 1 des Kreisprozesses ist durch die dimensionslosen Größen  $\bar{T}_1 = 1,5$  und  $\bar{v}_1 = 1$  gegeben. Im isothermen Entspannungsprozess expandiert das Volumen auf die doppelte Größe; der Zustand 3 liegt auf der kritischen Isotherme. Vom Van-der-Waals-Medium sind die Konstanten in der thermischen Zustandsgleichung bekannt:  $a = 615 \text{ Jm}^3/\text{kg}^2$ ,  $b = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ , außerdem die spezifische Gaskonstante und die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen:  $R = 276,09 \text{ J}/(\text{kg K})$ ,  $c_v = 3R$ .

**Hinweis:** Es ist vorteilhaft, in den Aufgabenteilen 2, 3 und 4 alle verwendeten Formeln in den dimensionslosen Variablen zu formulieren und dann erst Zahlenwerte einzusetzen.

- Berechnen Sie die kritische Temperatur  $T_K$ , den kritischen Druck  $p_K$  und das kritische spezifische Volumen  $v_K$  des Gases. Skizzieren Sie in einem  $\bar{p}, \bar{v}$ -Diagramm den Kreisprozess und das Nassdampfgebiet. Kennzeichnen Sie die abgegebene Arbeit als Fläche.
- Legen Sie eine Tabelle mit den thermischen Variablen  $\bar{p}_i, \bar{v}_i, \bar{T}_i$  in allen vier Eckzuständen des Kreisprozesses an, und tragen Sie alle Größen ein, die Sie dem Aufgabentext direkt entnehmen können! Berechnen Sie die Drücke  $\bar{p}_1$  und  $\bar{p}_2$ , und tragen Sie die Werte ebenfalls in die Tabelle ein.
- Berechnen Sie die thermischen Zustandsgrößen in dimensionsloser Form für Zustand 3; ergänzen Sie die Tabelle.
- Bestimmen Sie die Zustandsgrößen des Zustands 4, und vervollständigen Sie die Tabelle.
- Berechnen Sie die spezifische Wärme  $q_{12}$  für die isotherme Entspannung.
- Wie groß sind der thermische Wirkungsgrad und die abgegebene Arbeit des Kreisprozesses?

### Ausführliche Lösung:

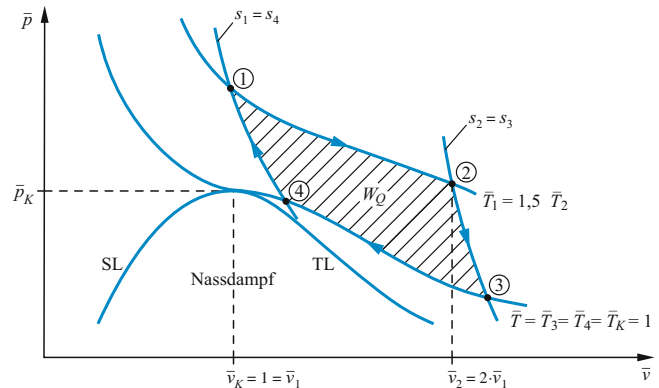
- Die Größen im kritischen Punkt lassen sich aus (20.40) berechnen. Man erhält:

$$v_K = 3b = 6,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}},$$

$$p_K = \frac{a}{27b^2} = 4,706 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 47,06 \text{ bar},$$

$$T_K = \frac{8}{27} \frac{a}{bR} = 300 \text{ K}.$$

Der Kreisprozess ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



- In der folgenden Tabelle sind die Daten für alle Eckpunkte des Kreisprozesses übersichtlich zusammengestellt. Die Daten werden in 1. bis 4. berechnet (die fett gedruckten Werte sind gegeben)

Zustand	$\bar{p}$	$\bar{v}$	$\bar{T}$
1	3	<b>1</b>	<b>1,5</b>
2	1,65	<b>2</b>	<b>1,5</b>
3	0,3896	5,9583	<b>1</b>
4	0,7357	2,583	<b>1</b>

Aus der van der thermischen Zustandsgleichung für ein Van-der-Waals-Gas-Medium folgt:

$$\left(\bar{p} + \frac{3}{\bar{v}^2}\right)(3\bar{v} - 1) = 8\bar{T}, \bar{p} = \frac{8\bar{T}}{3\bar{v} - 1} - \frac{3}{\bar{v}^2}$$

$$\Rightarrow \bar{p}_1 = 3 \quad \text{und} \quad \bar{p}_2 = 1,65.$$

- Punkt 2 und Punkt 3 haben die gleiche Entropie, d. h., es gilt  $s_2 = s_3$ .

Für  $c_v = \text{konst.}$  folgt:

$$s_3 - s_2 = 0 = c_v \ln \left( \frac{T_3}{T_2} \right) + R \ln \left( \frac{v_3 - b}{v_2 - b} \right).$$

Hieraus folgt

$$3R \ln \left( \frac{T_3}{T_2} \right) = -R \ln \left( \frac{v_3 - b}{v_2 - b} \right)$$

$$\text{bzw. } v_3 = \left( \frac{T_2}{T_3} \right)^3 (v_2 - b) + b.$$

Diese Gleichung wird nun in reduzierte Variablen umgeformt:

$$\bar{v}_3 v_K = \left( \frac{\bar{T}_2}{\bar{T}_3} \right)^3 (\bar{v}_2 v_K - b) + b$$

$$\text{bzw. } \bar{v}_3 3b = \left( \frac{\bar{T}_2}{\bar{T}_3} \right)^3 (\bar{v}_2 3b - b) + b,$$

$$\bar{v}_3 = \left( \frac{\bar{T}_2}{\bar{T}_3} \right)^3 \left( \bar{v}_2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3},$$

$$\bar{v}_3 = 5,9583, \quad \bar{p}_3 = \frac{8\bar{T}_3}{3\bar{v}_3 - 1} - \frac{3}{\bar{v}_3^2} = 0,3896.$$

4. Analog zu 3

$$\bar{v}_4 = \left( \frac{\bar{T}_1}{\bar{T}_4} \right)^3 \left( \bar{v}_1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} = 2,583, \quad \bar{p}_4 = 0,7357.$$

5. Die übertragene spezifische Wärme für den isothermen Prozess  $1 \rightarrow 2$  können wir aus der Definition der Entropie für den reversiblen Prozess berechnen:

$$ds = \frac{\delta q}{T}, \quad \Delta s_{12} = \frac{q_{12}}{T}, \quad q_{12} = T(s_2 - s_1),$$

$$q_{12} = RT_1 \left[ 3 \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + \ln \left( \frac{v_2 - b}{v_1 - b} \right) \right],$$

$$q_{12} = R\bar{T}_1 T_K \left[ 3 \ln \left( \frac{\bar{T}_2}{\bar{T}_1} \right) + \ln \left( \frac{v_K \bar{v}_2 - b}{v_K \bar{v}_1 - b} \right) \right].$$

Hieraus folgt  $q_{12} = 113,84 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ .

6. Der thermische Wirkungsgrad des Prozesses und die abgegebene spezifische Arbeit erhält man zu:

$$\eta_{th} = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 1 - \frac{\bar{T}_3}{\bar{T}_1} = \frac{1}{3}, \quad \eta_{th} = \frac{|w|}{q_{12}}.$$

Hieraus folgt  $|w| = \eta_{th} q_{12} = 37,95 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ .

**20.2 •** Einem idealen Gas im Zustand 1 wird in drei Prozessen die spezifische Wärme  $q = 200 \text{ kJ/kg}$  zugeführt. Gegeben sind:  $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$ ,  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $c_p = 1,005 \text{ kJ/(kg K)}$ ,  $\kappa = 1,4$ .

1. Berechnen Sie die spezifische Gaskonstante  $R$ , die molare Masse  $M$  und die spezifische Wärmekapazität  $c_v$  bei konstantem Volumen. Um welches Gas könnte es sich handeln?
2. Geben Sie den Endzustand 2 für den Fall an, dass die Wärme  $q_{12}$  isochor zugeführt wird! Gesucht sind  $T_2$  und  $p_2$ .
3. Geben Sie den Endzustand 3 für den Fall an, dass die Wärme  $q_{13}$  isobar zugeführt wird! Gesucht sind  $T_3$  und  $v_3$ .
4. Geben Sie den Endzustand 4 für den Fall an, dass die Wärme  $q_{14}$  isotherm zugeführt wird! Gesucht sind  $p_4$  und  $v_4$ .

### Ausführliche Lösung:

1. Für das ideale Gas gilt  $\frac{c_p}{c_v} = \kappa$ .

Hieraus folgt  $R = c_p - \frac{c_p}{\kappa} = 287,14 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$ .

$$R = \frac{R_m}{M} \Rightarrow M = \frac{R_m}{R} = \frac{8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}}{287,14 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 28,954 \frac{\text{g}}{\text{mol}},$$

$$c_v = \frac{c_p}{\kappa} = 0,718 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}.$$

Es handelt sich bei dem Gas um Luft.

2. Der Prozess läuft isochor ab. Es gilt:  $v = \frac{RT}{p} = \text{konst.}$

Hieraus folgt:

$$\frac{RT_1}{p_1} = \frac{RT_2}{p_2}, \quad p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1.$$

Die Temperatur nach der Zustandsänderung erhält man aus dem ersten Hauptsatz:  $u_2 - u_1 = q_{12} + w_{12}$ .

Für die isochore Zustandsänderung ohne Zufuhr von Arbeit, aber mit Wärmezufuhr ergibt sich:

$$q_{12} = u_2 - u_1 = \int_1^2 c_v(T) dT = c_v (T_2 - T_1).$$

Hieraus folgt:

$$T_2 = T_1 + \frac{q_{12}}{c_v} = 298,55^\circ\text{C} = 571,7 \text{ K}.$$

Aus der thermischen Zustandsgleichung erhält man  $p_2 = 1,95 \text{ bar}$ .

3. Nun ist Prozessverlauf isobar. Es gilt:

$$p = \frac{RT}{v} = \text{konst.}, \quad \frac{RT_1}{v_1} = \frac{RT_3}{v_3}, \quad v_3 = \frac{T_3}{T_1} v_1.$$

Der erste Hauptsatz lautet in Enthalpieform:  $dh = \delta q + v dp$ .

Für die isobare Zustandsänderung ohne Zufuhr von Arbeit und nur mit Wärmezufuhr ergibt sich:

$$dh = \delta q \Rightarrow h_3 - h_1 = q_{13} = \int_1^3 c_p(T) dT = c_p(T_3 - T_1),$$

$$T_3 = T_1 + \frac{q_{13}}{c_p} = 219,00^\circ\text{C} = 49,15\text{K}.$$

Aus der thermischen Zustandsgleichung folgt:

$$v_1 = \frac{RT_1}{p_1} = 0,842 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}, \quad v_3 = 1,413 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}.$$

4. Nun ist Prozessverlauf isotherm. Es gilt:

$$T = \frac{vp}{R} = \text{konst.}, \quad \frac{v_1 p_1}{R} = \frac{v_4 p_4}{R}, \quad p_4 = \frac{v_1}{v_4} p_1.$$

Der erste Hauptsatz lautet:  $u_4 - u_1 = q_{14} + w_{14}$ .  
Für die isotherme Zustandsänderung mit Wärmezufuhr und Volumenänderungsarbeit folgt mit  $u = u(T)$ :

$$q_{14} = -w_{14} = \int_1^4 p dV, \quad p = \frac{RT}{v}.$$

$$q_{14} = \int_1^4 \frac{RT}{v} dV = RT_1 \cdot \int_1^4 \frac{1}{v} dV = RT_1 \ln \frac{v_4}{v_1}.$$

Es folgt

$$v_4 = v_1 e^{\frac{q_{14}}{RT_1}} = 9,0614 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}.$$

Aus der thermischen Zustandsgleichung erhält man schließlich  $p_4 = 0,0929 \text{ bar}$ .

**20.3** • Betrachten Sie vier Zustände 1, 2, 3 und 4 eines idealen Gases in einem geschlossenen System; der Isentropenexponent des idealen Gases ist  $\kappa = 5/3$ .

Bekannt sind folgende Daten der Zustandsgrößen:

$$p_1 = 32 \text{ bar}, \quad p_2 = p_1, \quad p_3 = 1 \text{ bar}, \quad p_4 = p_3;$$

$$v_1 = 1 \text{ m}^3/\text{kg}, \quad v_2 = v_3, \quad s_3 = s_1, \quad v_4 = v_1.$$

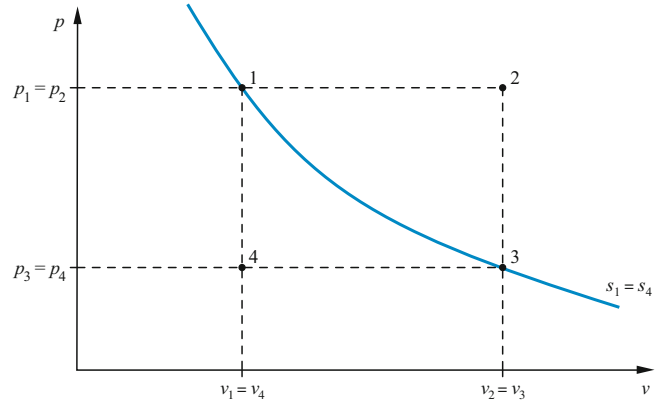
- Bestimmen Sie das spezifische Volumen  $v_3$ !
- Skizzieren Sie die Lage der vier Zustandspunkte im  $p,v$ -Diagramm! Zeichnen Sie auch die Isentrope durch Zustand 1 ein!
- Berechnen Sie im Zustand 1 die Steigung der Isentrope im  $p,v$ -Diagramm!
- Welche der folgenden Zustandsänderungen  $1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 3$ ,  $3 \rightarrow 4$ ,  $4 \rightarrow 1$  und  $1 \rightarrow 3$  kann adiabat durchgeführt werden? Streichen Sie einfach in der Liste diejenigen Zustandsänderungen, die adiabat nicht möglich sind! Begründen Sie Ihre Antwort!

**Ausführliche Lösung:**

1. Da  $s_3 = s_1$  ist (isentropische Zustandsänderung) folgt:

$$p_1 v_1^\kappa = p_3 v_3^\kappa, \quad v_3 = v_2 = \left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{\frac{1}{\kappa}} v_1 = 8 v_1 = 8 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}.$$

2. Die Abbildung zeigt eine Skizze der Zustandspunkte in einem  $p,v$ -Diagramm.



3.

$$p v^\kappa = p_1 v_1^\kappa, \quad p = p_1 v_1^\kappa v^{-\kappa}.$$

$$\left. \frac{dp}{dv} \right|_s = p_1 v_1^\kappa (-\kappa) v^{-\kappa-1} = -\kappa \underbrace{\frac{p_1 v_1^\kappa}{v^\kappa}}_{=p} \frac{1}{v} = -\kappa \frac{p}{v}$$

Für Zustand 1 eingesetzt ergibt sich:

$$\left. \frac{dp}{dv} \right|_{s,1} = -\frac{160}{3} \frac{\text{kg bar}}{\text{m}^3} = -53,3\overline{3} \frac{\text{kg bar}}{\text{m}^3}.$$

4. In einem adiabaten System kann die Entropie nicht abnehmen, deshalb sind diejenigen Zustandsänderungen, bei denen die Entropie (formal) abnimmt nicht möglich. Anders ausgedrückt, der Endzustand  $j$  eines Prozesses  $i \rightarrow j$  kann also nur rechts von der Isentrope durch  $i$  liegen. Nicht möglich sind also:  $2 \rightarrow 3$  und  $3 \rightarrow 4$ .

**20.4** • In einem Dampfkessel ( $V = 0,60 \text{ m}^3$ ) befinden sich zum Ausgangszeitpunkt insgesamt  $m = 300 \text{ kg}$  Wasser bei einer Temperatur von  $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$ . Abgesehen von dem Wasser befindet sich keine weitere Materie in dem Kessel. Das bedeutet, dass sich der Druck im Kessel vom Umgebungsdruck unterscheiden kann.

- Welche Masse  $m'$  befindet sich dabei im Zustand der siedenden Flüssigkeit und welche Masse  $m''$  im Zustand des gesättigten Dampfes?
- Welche Wärme  $Q_{12}$  muss dem Kessel zugeführt werden, wenn das Wasser bei unverändertem Kesselvolumen den Druck  $p_2 = 100 \text{ bar}$  erreichen soll?

3. Wie viel Wasser  $\Delta m$  verdampft während dieser Zustandsänderung?

Zustandsgrößen des Wassers im Phasengleichgewicht:

$p$ in bar	$\vartheta$ in °C	$v'$ in m <sup>3</sup> /kg	$v''$ in m <sup>3</sup> /kg	$h'$ in kJ/kg	$h''$ in kJ/kg
0,023	20	0,00100	57,84	83,9	2537,3
100	310,9	0,00145	0,018	1407,0	2725,6

### Ausführliche Lösung:

1. Das Phasengleichgewicht zwischen Dampf und Flüssigkeit bei  $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$  bedeutet  $p_1 = 0,023 \text{ bar} = 2300 \text{ Pa}$ , also gilt:

$$v_1 = v'_1 + x_1 (v''_1 - v'_1) = \frac{V}{m},$$

$$x_1 = \frac{\frac{V}{m} - v'_1}{v''_1 - v'_1} = \frac{\frac{0,6 \text{ m}^3}{300 \text{ kg}} - 0,001 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}}{57,839 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} = 1,729 \cdot 10^{-5}.$$

Außerdem muss gelten:

$$x_1 = \frac{m''_1}{m'_1 + m''_1} = \frac{m''_1}{m}.$$

Man findet somit:

$$m''_1 = x_1 m = 5,187 \cdot 10^{-3} \text{ kg},$$

$$m'_1 = (1 - x_1) m = 299,9948 \text{ kg}.$$

2. Zur Bestimmung der zuzuführenden Wärme wird der erste Hauptsatz aufgestellt. Dabei wird von Anfang an berücksichtigt, dass die kinetische und potenzielle Energieänderung null ist und der Dampfkessel ein geschlossenes System darstellt. Es folgt:

$$U_2 - U_1 = W_{V,12} + Q_{12},$$

wobei gilt:  $dV = 0$  (isochorer Prozess) sowie  $W_{V,12} = 0$ .

Es folgt:

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = H_2 - p_2 V - H_1 + p_1 V$$

$$= m [h_2 - h_1 - v (p_2 - p_1)].$$

Zur Berechnung von  $h_1$  wird der bereits berechnete Dampfanteil  $x_1$  benötigt:

$$h_1 = h'_1 + x_1 (h''_1 - h'_1) = 83,942 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.$$

Entsprechend ist  $x_2$  zur Berechnung von  $h_2$  notwendig:

$$x_2 = \frac{\frac{V}{m} - v'_2}{v''_2 - v'_2} = 0,03323.$$

Hieraus folgt

$$h_2 = h'_2 + x_2 (h''_2 - h'_2) = 1450,82 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.$$

Mit  $v = \frac{V}{m}$  berechnet sich die zuzuführende Wärme dann:

$$Q_{12} = m \left[ h_2 - h_1 - \frac{V}{m} (p_2 - p_1) \right]$$

$$= 300 \text{ kg} \left[ 1450,82 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 83,942 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right.$$

$$\left. - 0,002 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} (9.997.700 \text{ Pa}) \right]$$

$$= 404,065 \text{ MJ}.$$

3. Es gilt:

$$x_2 = \frac{m''_2}{m}; \quad x_1 = \frac{m''_1}{m}.$$

Somit folgt:

$$\Delta m = m''_2 - m''_1 = m (x_2 - x_1) = 9,964 \text{ kg}.$$